Mravljica na tetraedru

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

12. avgust 2025

1 Uvod

Uganke na temo pobega so del večih ustnih izročil. Spomnimo se lahko kanonične osnovnošolske uganke o kmetu, ki mora čez reko pretovoriti volka, kozo ter zeljnato glavo, obenem pa ima na voljo le majhen čoln, ki lahko poleg kmeta nosi le enega izmed naštetih. Cilj je seveda najti strategijo, ki volka, kozo ter zeljnato glavo varno pretovori čez reko (ob kmetovi odsotnosti volk seveda snede kozo, koza pa si poteši lahkoto z zeljnato glavo) in minimizira število kmetovih prečkanj reke.

Iz te preproste naloge, ki je bila prvič zapisana v poznem osmem stoletju [1], so zrasle mnoge druge zagonetke na temo pobega. Med mladimi estonskimi matematiki se je razširila naslednja uganka pobega, ki naj bi se prvotno pojavila na spletnih ugankarskih forumih v zgodnjih dvatisočih.

2 Naloga

Naloga 2.1: [2]

Predstavljajmo si pravilen tetraeder, po katerem se je mogoče gibati le po njegovih robovih.
Na robove tega tetraedra so postavljeni trije pajki ter mravljica. Mravljica se premika s konstantno hitrostjo ene stranice na sekundo, hitrost pajkov je prav tako konstantna ter strogo večja od hitrosti mravljice. Poleg premikanja lahko mravljica in pajki tudi mirujejo.
Pajki so slabovidni, prav tako pa je mravljica zelo majhna. To pomeni, da položaj mravljice pajkom nikoli ni znan, prav tako pa pajek mravljico ujame le, če se v nekem trenutku znajde na isti točki kot ona.
Pred začetkom igre se pajki posvetujejo in skupaj izberejo deterministično strategijo za iskanje mravljice. Njen začetni položaj jim ni znan, lahko pa med igro spremljajo lokacije drug drugega.
Na srečo ima mravljica zelo dober sluh; strategijo pajkov je preslišala ter lahko svoje premikanje prilagodi načrtu pajkov.
Ali lahko pajki - ne glede na začetne položaje ter strategijo mravljice - zagotovijo, da bodo mravljico ujeli v končnem času? Ali je odgovor odvisen od razmerja med hitrostjo mravljice ter hitrostjo pajkov?

3 Rešitev

Rešitev. Pokažemo, da lahko pajki mravljico vedno ujamejo, če je njihova hitrost le nekoliko večja od hitrosti mravljice. Najprej bomo opisali strategijo, ki jo uberejo pajki, nato pa bomo pokazali, da ta strategija vedno vodi do ujetja mravljice.

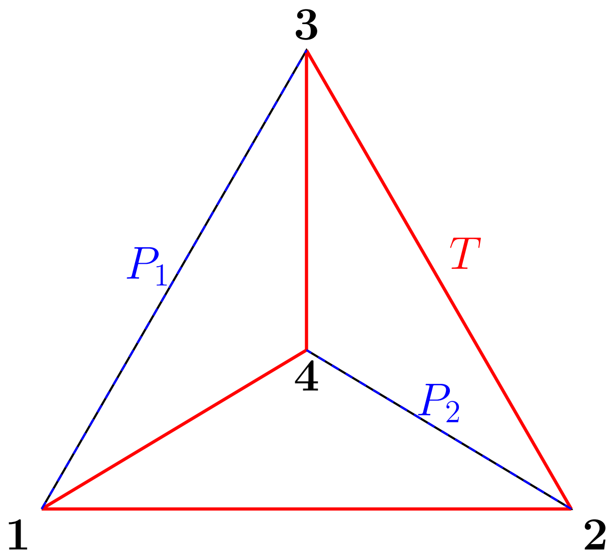
3.1 Strategija pajkov

Oglišča tetraedra označimo s številkami $1, 2, 3$ in 4. Poimenujmo enega izmed pajkov T, ostala dva pa P_1 in P_2. Najprej se vsi trije pajki zberejo v oglišču 1, nato pa se P_2 premakne v oglišče 2. Pajki se premikajo na sledeči način:

- T se ves čas premika po ciklu $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$.
- P_1 se premika po stranici $1 - 3$ ali pa miruje v enem izmed oglišč.
- P_2 ravna enako kot P_1, a na stranici $2 - 4$.

Določimo še, kdaj P_1 in P_2 mirujeta in kdaj se premikata:

- Ko se T začne premikati po povezavi $1 \to 4$, se P_2 začne premikati po povezavi $2 \to 4$. Ko sočasno prispeta v oglišče 4, se P_2 ustavi.
- Ko se T začne premikati po povezavi $4 \to 3$, se P_1 začne premikati po povezavi $1 \to 3$. Ko sočasno prispeta v oglišče 3, se P_1 ustavi.
- Ko se T začne premikati po povezavi $3 \to 2$, se P_2 začne premikati po povezavi $4 \to 2$. Ko sočasno prispeta v oglišče 2, se P_2 ustavi.
- Ko se T začne premikati po povezavi $2 \to 1$, se P_1 začne premikati po povezavi $3 \to 1$. Ko sočasno prispeta v oglišče 1, se P_1 ustavi.



3.2 Dokaz, da je mravljica ujeta

Da je mravljica ujeta bomo dokazali z uporabo *monovariante*. To pomeni, da bomo definirali nenegativno količino, ki s časom pada za nek fiksen faktor, in je enaka 0 natanko tedaj, ko je mravljica ujeta. Tako bomo dokazali, da je mravljica ujeta v končnem času.

Definirajmo od časa odvisno količino $M(t)$, s katero bomo poiskusili meriti razdaljo med mravljico in pajkom T.

- Če je mravljica na ciklu $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$, definiramo $M(t)$ kot razdaljo med trenutno lokacijo T in trenutno lokacijo mravljice, v smeri gibanja T.
- Če je mravljica v notranjosti stranice 1–3, definiramo $M(t)$ kot razdaljo med trenutnim položajem T in tistim ogliščem stranice 1–3, skozi katerega je mravljica vsotpila na stranico 1-3.
- Če je mravljica v notranjosti stranice 2–4, definiramo $M(t)$ na enak način kot v prejšnjem primeru.

Če se mravljica giblje samo po ciklu, po katerem se premika T, bo očitno prej ali slej ujeta, saj je pajek T hitrejši od nje.

Denimo, da se mravljica med svojim begom zateče na eno izmed stranic 1–3 ali 2–4. Zaradi simetrične vloge teh dveh stranic in analognega vzorca gibanja P_1 in P_2, se brez izgube splošnosti omejimo na primer stranice 1–3.

Mravljica na tej stranici ne more ostati dolgo, saj se P_1 premika iz enega oglišča v drugo. Poleg tega iz definicije premikanja P_1 sledi, da bo mravljica prisiljena to stranico zapustiti skozi isto oglišče, skozi katero je na stranico vstopila.

Naj bo t_0 trenutek ob katerem se mravljica premakne iz enega izmed oglišč v notranjost stranice 1–3, in naj bo t_1 prvi trenutek, ko zapusti notranjost te stranice. Trdimo, da če mravljica ni bil ujeta, potem velja $M(t_0) > M(t_1)$.

Denimo, da mravljica ni bil ujeta ter velja $M(t_0) \leq M(t_1)$. Ker se mravljica ob trenutkih t_0 in t_1 nahaja na ciklu, po katerem se premika T, je $M(t_0)$ razdalja med T in mravljico ob času t_0, enako velja za $M(t_1)$. Če je $M(t_0) \leq M(t_1)$, potem se T ob času t_1 nahaja pred mravljico (v smislu cikla). To pomeni, da je moral pajek T med mravljičinem postanku na stranici 1-3 prečkati oglišče, skozi katerega mravljica zapusti stranico 1–3.

Ker pa P_1 in T hkrati prispeta v oglišča 1 in 3, sledi, de je bodisi P_1 ujel mravljico, bodisi je mravljica zapustila stranico 1-3 pred časom t_1. Slednje je v protislovju z definicijo t_1.

Sledi torej, da velja $M(t_0) > M(t_1)$ ali pa je bil mravljica ujeta.

Naloga je praktično rešena. Če P_1 ali P_2 mravljice ne ujameta na njunih stranicah, se mora mravljica gibati po ciklu, na katerem ga postopoma dohiteva T. Količina $M(t)$ se obenem ne zmanjša, če se mravljica zateče na eno izmed stranic 1–3 ali 2–4, prav tako pa se med premikanjem mravljice po ciklu, ki ga obhodi T, manjša za fiksen faktor, namreč za faktor razlike med hitrostjo pajkov ter hitrostjo mravljice. Sledi, da je mravljica gotovo ujeta v končnem času, dokler je razmerje med hitrostjo mravljice in hitrostjo pajkov manjše od 1. $\square$

4 Nadaljevanje

Uporaba monovariante je posebej uporabna pri algoritmičnih razmislekih. Če definiramo zaporedje potez, ki dosežejo naš cilj, moramo le še pokazati, da se vsi koraki v našem zaporedju zgodijo; lahko bi se namreč na kakšnem koraku ustavili zavedno. To pogosto naredimo z uporabo monovariante, količine, ki se z vsakim korakom našega procesa zmanjša ter je enaka 0, če se je naš algoritem ustavil.

V primeru vprašanj o končnih množicah je ponavadi monovarianta, ki jo definiramo naravno število. Da naš algoritem terminira je tedaj jasno, saj ne obstaja padajoče zaporedje naravnih števil. A v primeru neskončnih množic ter monovariant, ki so realna števila, je potreben še dodaten razmislek. Zgodilo bi se lahko namreč, da je monovarianta strogo pada z vsakim korakom, a nikoli ne doseže nič. V rešitvi naloge bi v principu lahko veljalo, da je $M(t) = \frac{1}{t}$, kar ne bi impliciralo, da je mravljica ujeta v končnem času.

Tej težavi smo se izognili tako, da smo argumentirali, da je monovarianta pada za fiksen faktor. Če se mravljica kadarkoli zateče na stranico 1-3 ali na stranico 2-4 bo s tem skrajšala čas do svojega ujetja, saj se bo na cikel, ki ga obhodi T, vrnila skozi isto oglišče skozi katerga je vsopila na eno izmed omenjenih stranic, še zmeraj pa se bo nahajala pred T v smislu cikla. Monovarianta $M(t)$ bo tako enaka kot če bi se mravljica le ustavila na oglišču, kar očitno le skrajša njeno ujetje. V ekstremnem primeru se mravljica ob začetku lova nahaja direktno za pajkom T ter se vedno giba le po ciklu, ki ga obhodi T. V tem primeru je mravljica ujeta v času

$$\frac{4}{v-c},$$

kjer je v hitrost pajkov ter c hitrost mravljice.

Bralcu v izziv postavljam naslednjo nalogo, v kateri prav tako nastopa mravljica in trije pajki. Pajki imajo tokrat odličen vid ter lahko vedno spremljajo položaj mravljice.

Naloga 4.1: [3]

Trije pajki in mravljica se premikajo po robovih kocke. Mravljica se premika s trikrat večjo hitrostjo od pajkov. Ali lahko pajki ujamejo mravljico ne glede na to, kako so bitja postavljena na začetku?

Rešitev. Pajki lahko vedno ujamejo mravljico. Eden izmed pajkov se postavi v oglišče 1, druga dva pa se postavita na polovici daljic 2-6 ter 4-8. Na oglišča $2, 4, 6$ in 8 pajki postavijo dvobarvne semaforje. Te svetijo rdeče, če je mravljica od semaforja oddaljena manj kot 1.5 stranice, drugače svetijo zeleno.

Nato se pajka A in B (tista, ki sta na začetku na polovici robov) premikata tako, da sta od rdečega semaforja oddaljena za ravno takšno razdaljo, da se lahko pravočasno premaknita na semafor, če bi ga mravljica želela prečkati. S tem je mravljica ujeta na eni polovici kocke (kocka razrezana diagonalno, z ravnino, ki poteka skozi oglišča $2, 4, 6$ in 8). Pajek C se nato postavi na eno izmed oglišč 3 oz. 7, kar pomeni, da je mravljica ujeta na treh robovih kocke ter jih ne more zapustiti. C se ležerno premakne do mravljice. □

Literatura

[1] Peter Hadley in David Singmaster. *Problems to Sharpen the Young: The First English Translation of Alcuin's Propositiones ad Acuendos Juvenes*. London: Trinity College Library, 1992.

[2] OCF Riddle Forum. *Hard Riddle: Monk Climbing a Mountain*. Datum dostopa: 07.08.2025. 2003. URL: https://www.ocf.berkeley.edu/~wwu/cgi-bin/yabb/YaBB.cgi?board=riddles_hard;action=display;num=1067450034;start=0#0.

[3] Peter Winkler. *Mathematical Mind-Benders*. Wellesley, MA: A K Peters, 2007. ISBN: 978-1-56881-336-3.