Dokazi obstoja v kombinatoriki

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

15. oktober 2024

1 Konstruktivni dokazi

Pohlepni algoritem: *Na vsakem koraku izberemo najboljšo kratkoročno opcijo.*

Naloga 1.1. *Pokaži, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto različnih potenc števila 2.*

Naloga 1.2. *Naj bo δ najmanjša stopnja vozlišča grafa G. Pokaži, da ima G pot dolžine $\delta + 1$.*

Naloga 1.3. *Naj bo Δ največja stopnja vozlišča grafa G. Pokaži, da lahko graf G pobarvamo z $\Delta + 1$ barvami, kjer nobeni dve sosednji oglišči nista iste barve.*

Naloga 1.4. *V ravnini imamo n rdečih in n modrih točk, kjer nobene tri niso kolinearne. Pokaži, da jih lahko povežemo z daljicami tako, da vsaka povezava povezuje modro in rdečo točko, ter da se nobeni dve povezavi ne sekata.*

Naloga 1.5. *Graf je Eulerjev, če obstaja obhod, ki se začne v nekem vozlišču, obhodi vse povezave grafa, ter se konča v začetnem vozlišču. Pokaži, da je povezan graf Eulerjev, če in samo če so vse stopnje vozlišč sode.*

Naloga 1.6. *V kvadratkih $m \times n$ tabele so zapisana realna števila. Dovoljen korak je pomnožiti vse vnose določene vrstice z -1. Pokaži, da lahko po končno mnogo korakih dosežemo, da so vsote vseh števil v vseh stolpcih in vseh vrsticah nenegativne.*

2 Nekonstruktivni dokazi

Izrek 2.1: Dirichletov princip

Če množico A z k elementi razdelimo na m disjunktnih podmnožic, potem ima vsaj ena podmnožica vsaj $\left\lceil \frac{k}{m} \right\rceil$ elementov.

Naloga 2.1. *Pokaži, da sta se na vsaki zabavi neki dve obsebi rokovali z istim številom oseb.*

Naloga 2.2. *Pokaži, da ima neka neprazna podmnožica množice n naravnih števil vsoto elementov deljivo z n.*

Naloga 2.3. *Pokaži, da imata neki dve izmed sedmih točk, ki ležijo v notranjosti pravilnega šestkotnika, medsebojno razdaljo največ 1.*

Naloga 2.4. *Naj bo A podmnožica $\{1, \ldots, 2n\}$ z $n+1$ elementi. Pokaži, da nek element A deli nek drug element A.*

Naloga 2.5. *Naj bo S množica 6 točk znotraj pravokotnika dimenzij 4×3. Pokaži, da je razdalja med nekima dvema točkama S manjša ali enaka $\sqrt{5}$.*

2.1 Dokaz s protislovjem

Naloga 2.6. *Šahdve je igra identična šahu, le da ima vsak igralec na voljo dve zaporedni potezi. Pokaži, da lahko beli črnemu vedno prepreči zmago partije šahdve.*

Naloga 2.7. *Pokaži, da lahko v vsakem mnogokotniku najdimo različni stranici dolžin a ter b, da velja $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2$.*

Naloga 2.8. *Na turnirju n igralcev odigra partijo z vsakim od sebe različnim igralcem. Pokaži, da lahko igralce oštevilčimo od 1 do n tako, da $i+1$-vi igralec porazi i-tega igralca za vse $1 \leq i \leq n-1$.*

2.1.1 Optimalna predpostavka

Denimo, da želimo najti množico velikosti vsaj n, katere elementi zadoščajo nekemu pogoju. Namesto konstruiranja take množice lahko obravnavamo največjo množico elementov, ki zadoščajo danemu pogoju, ter nato pokažemo, da ima slednja vsaj n elementov.

Naloga 2.9. *Naj bo X n-elementna možoca ter $A_1, \ldots, A_m$ podmnožice X, vsaka izmed katerih ima natantko 3 elemente. Predpostavi, da ima presek vsakih dveh podmnožic A_i in A_j največ en element. Pokaži, da obstaja podmnožica X z vsaj $\left\lfloor \sqrt{2n} \right\rfloor$ elementi, ki ne vsebuje nobene izmed A_i.*