Vaje iz analize 2b

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

3. april 2025

Once you leave the ground, you fly.
Some people fly longer than others.

Michael Jordan

Kazalo

1 Fourierova vrsta **3**

2 Vektorska analiza **5**

2.1 Vektorske diferencialne operacije 5

2.2 Integrali skalarnih polj po ploskvah in krivuljah 7

2.3 Integral vektorskih polj po ploskvah in krivuljah 12

Literatura **25**

1 Fourierova vrsta

Izrek 1.1

Če je $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ nezvezna v končno mnogo točkah, kjer obstajata levi in desni odvod, ter je med točkami nezveznosti odvedljiva, potem definiramo:

$$FV(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

kjer je

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$FV(f)(x)$ konvergira $\forall x \in [-\pi, \pi]$ proti

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

V krajiščih definicijskega območja prav tako velja:

$$FV(f)(\pm\pi) = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

Trditev 1.2

- Će je f liha funkcija je $a_n = 0$ za vse n.
- Če je f soda funkcija je $b_n = 0$ za vse n.

Trditev 1.3: Defaktorizacijske formule

- $$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$
- $$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$
- $$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2})$$

Trditev 1.4

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

- $$\int x\cos(nx)\,dx = \frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + C$$
- $$\int x\sin(nx)\,dx = \frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} + C$$

Dokaz. Lahko per partes, lahko pa tudi upoštevajoč $cos(nx) + i\cdot\sin(nx) = e^{inx}$. □

Komentar 1.5

Če imamo zadosti lepo funkcijo (zvezno, razen v končno mnogo točkah, kjer obstajata leva in desna limita, ter odvedljivo med točkami nezveznosti) $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ jo lahko razširimo na $[-\pi,\pi]$ bodisi kot sodo, bodisi kot liho funkcijo. Tako dobimo za f bodisi *kosinusno*, bodisi *sinusno Fourierovo vrsto.*

Trditev 1.6

Naslednji integrali so standardni pri računanju Fourierovih vrst:

- $$\int x^2\cos(nx)dx = \frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\sin(nx) + C$$
- $$\int x^2\sin(nx)dx = \frac{-x^2}{n}\cos(nx) + \frac{2x}{n^2}\sin(nx) + \frac{2}{n^3}\cos(nx) + C$$

Izrek 1.7: Parsevalova enakost

Naj bo prostor X Hilbertov in $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ kompleten ortonormiran sistem. Tedaj za vse $x \in X$ velja:

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

V specifičnem primeru prostora $L^2[-\pi,\pi]$ se Parsevalova enakost glasi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 = 2\pi a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i^2 + b_i^2),$$

kjer je Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ enaka

$$FV(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

2 Vektorska analiza

Pravilen pogled na skalarna ter vektorska polja ni kot funkcije treh spremenljivk nad $\mathbb{R}$, temveč kot funkcije, ki sprejmejo vektorje v $\mathbb{R}^3$. V izbrani bazi takemu polju seveda pripada neka neka zvezna funkcija treh spremenljivk, a nista a priori enaka.

2.1 Vektorske diferencialne operacije

Definicija 2.1

Gradient polja je operator ∇, ki ima v standardni bazi obliko $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Divergenca vektorskega polja $g(\vec{r}) = g(x, y, z) = (X(\vec{r}), Y(\vec{r}), Z(\vec{r}))$ je definirana kot

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Vektorsko polje je *solenoidalno polje*, če je $\operatorname{div}(\vec{g}) = \vec{0}$

Komentar 2.2

$$\operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{a}) \neq (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{a}$$

Enakost iz prvega letnika v tem primeru **ne velja**.

Trditev 2.3: Lagrangeva identiteta

Naj sta $\vec{a}$ ter $\vec{b}$ vektorja v $\mathbb{R}^3$. Tedaj velja

$$|\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2$$

Definicija 2.4

Vektorsko polje $\vec{f}$ je potencialno, če obstaja skalarno polje u, da velja

$$\vec{f} = \operatorname{grad}(u).$$

Polje u imenujemo potencial vektorskega polja $\vec{f}$.

Primer 2.5

- Pokaži, da je $\vec{f} = (2x\cos(y) - y^2\sin(x), 2y\cos(x) - x^2\sin(y), 4)$ potencialno polje ter določi njegov potencial.
- Določi $a, b \in \mathbb{R}$, da bo $\vec{f} = (2 \cdot (axzy^4 - y), 2 \cdot (bx^2zy^3 - x), 3x^2y^4)$ potencialno polje.

Rešitev. • Ker je $u_z = 4$ velja $u(x, y, z) = c_3(x, y) + 4z$. Z integriranjem analogno izpeljemo

$$u = x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x) + c_1(y, z)$$

ter

$$u = y^2 \cos(x) + x^2 \cos(y) + c_2(x, z).$$

Vemo, da je potencial do konstante natančno določen. Asist. dr. Gregor Cigler poda naslednji nasvet za to kako uganemo potencial: "Vzamemo vsoto unije členov, ki se pojavijo pri posamezni integraciji."Če sledimo tej mordrosti uganemo:

$$u(x, y, z) = x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x) + 4z + c,$$

kjer je $c \in \mathbb{R}$.

•

$$\mathrm{rot}(\vec{f}) = \left(12y^3x^2 - 2bx^2y^3, 2axy^4 - 6xy^4, 4bxzy^3 - 2 - 8axzy^3 + 2\right).$$

Opazimo, da je $b = 6$ ter $a = 3$. Določimo še potencial:

$$u_x = 2(3xzy^4 - y) \implies u = 2\left(\frac{3x^2zy^4}{2} - xy\right) + c_1(y, z)$$

$$u_y = 2(6x^2zy^3 - x) \implies u = 2\left(\frac{6x^2zy^4 - xy}{4} - xy\right) + c_2(x, z)$$

$$u_z = 3x^3y_4 \implies u = 3x^2y^4z + c_3(x, y)$$

Tako uganemo $u = 3x^2y^4z - 2xy + c$ □

Izrek 2.6

Naj bo $\vec{f} : D \to R^3$ funkcija razreda C^1 ter D odprta podmnožica R^3, ki je zvezdasto območje. Tedaj velja:

$$\vec{f} \text{ je potencialno polje} \iff \mathrm{rot}(\vec{f}) = \vec{0}.$$

Implikacija iz leve v desno velja v vsakem primeru.

Primer 2.7

Naj sta $a, b \in \mathbb{R}^3$. Pokaži, da je

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\vec{b} \cdot \vec{r}}\right) = \frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2}$$

Rešitev. Preden začnemo se pokrižamo, nato pa gremo bash. □

2.2 Integrali skalarnih polj po ploskvah in krivuljah

Primer 2.8

Izračunaj površino torusa s polmeroma $0 < a < R$.

Rešitev. Plašč torusa parametriziramo kot

$$x = (R + a \cdot \cos(\theta)) \cos(\varphi) \wedge y = (R + a \cdot \cos(\theta)) \sin(\varphi) \wedge z = a \sin(\theta),$$

kjer $\varphi \in [0, 2\pi)$ ter $\theta \in [0, 2\pi)$. Tako je $\vec{r}(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$ parametrizacija torusa.

$$\begin{aligned} \vec{r}_\varphi &= ((R + a\cos(\theta))\sin(\varphi), (R + a\cos(\theta) cos(\varphi), 0) \\ \vec{r}_\theta &= (-a\sin(\theta)\cos(\varphi), -a\sin(\theta)\sin(\varphi), a\cos(\theta)) \\ E &= \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = (R + a\cos(\theta))^2 \\ G &= \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = a^2 \\ F &= 0 \end{aligned}$$

Vrednost $F = 0$ smo uganili, saj je $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0 \iff \vec{r}_u \perp \vec{r}_v$. To se zgodi natanko tedaj, ko so koordinatne krivulje pravokotne (koordinatna krivulja je pot, ki jo oriše ena koordinata pri fiksni drugi koordinati v parametrizaciji). Pri torusu sta koordinatni krivulji krog z radijem R v xy ravnini ter krog z radijem a, ki opiše obseg torusa. Sledja sta pravokotna. Dobimo

$$P(S) = \int_S dS = \int_D a \cdot (R + a\cos(\theta)) d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cdot (R + a\cos(\theta)) d\theta d\varphi = 2\pi a \cdot 2\pi R$$

Zelo pomenljiv rezultat. $\square$

Komentar 2.9

Imamo parametrizacijo, ki iz "lepega"podprostora $D \subseteq \mathbb{R}^2$ slika v naš ciljni objekt v $\mathbb{R}^3$. Od parametrizacije zahtevamo injektivnost ter regularnost (odvodi so nevzporedni):

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \quad \forall (u, v) \in D$$

Trditev 2.10: Površina ploskve

$$P(S) = \int_S dS = \int_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \; du\, dv = \int_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

kjer je $E = |\vec{r}_u|^2 = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$, $G = |\vec{r}_v|^2 = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ ter $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$

Primer 2.11

Na enotski sferi je dana krivulja K z enačbo

$$\varphi = \tan(\theta),$$

kjer sta ϕ ter θ sferična kota. Določi dolžino krivulje K.

Rešitev. Dopusten interval za θ je $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kjer krajišči, kot množici z mero 0, ignoriramo. θ je tukaj zemljepisna višina, φ pa zemljepisna širina.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(\varphi, \theta) &= (\cos(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\theta)) \\
\vec{r}_\varphi &= (-\sin(\varphi)\cos(\theta), \cos(\varphi)\cos(\theta), 0) \\
\vec{r}_\theta &= (-\cos(\varphi)\sin(\theta), -\sin(\varphi)\sin(\theta), 0) \\
E &= \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = \cos(\theta)^2 \\
F &= 0 \\
G &= \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = 1,
\end{aligned}$$

kjer smo $F = 0$ določili iz pravokotnosti poldnevnikov ter vzporednikov.

$$d\varphi = \frac{1}{\cos(\theta)^2} d\theta.$$

Tako velja

$$\ell(K) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(\theta)^2 (\frac{1}{\cos(\theta)^2} d\theta^2)^2 + 1(d\theta)^2} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \cos(\theta)^2}}{\cos\theta} \, d\theta$$

Konvergenco slednjega obravnavamo upoštevajoč

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \quad \text{ter} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Dobimo, da integral ne obstaja. □

Komentar 2.12

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ter $\vec{r}(u, v)$ parametrizacija. Naj bo $\gamma(t) = \{(u(t), v(t)) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ krivulja v definicijskem območju $\vec{r}$. Tedaj je

$$\ell(K) = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d}{dt}(\vec{r}(u(t), v(t))) \right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2} dt,$$

kjer je $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$ ter $dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt$ ter

$$d^2 s = E\, du^2 + F\, du\, dv + G\, dv^2$$

Trditev 2.13: Integral skalarnega polja po krivulji

Če je $u(x,y,z)$ skalarno polje ter je $K = \{\vec{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$ (kjer je $\vec{r}(t)$ regularna parametrizacija: $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$) neusmerjena krivulja je

$$\int_K u\, ds = \int_a^b u(\vec{r}(t))|\dot{\vec{r}}(t)|dt.$$

Primer 2.14

Naj bo $a > 0$. Izračunaj težišče homogenega loka astroide, ki je podana z enačbo

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x, y \geq 0$$

Rešitev.

$$x_T = \frac{1}{m(K)} \cdot \int_K x\, dm = \frac{1}{m(K)} \int_K x \cdot \rho\, ds = \frac{1}{\int_K \rho\, ds} \cdot \int_K x\rho\, ds\,,$$

kjer je ds "delček"dolžine ter ρ dolžinska gostota. Ker je K homogena se ρ pokrajša

$$x_T = \frac{1}{\ell(K)} \int_K x\, ds.$$

Kaj pa je ds? Po fizikalno lahko pot enačimo s produktom hitrosti ter spremembe časa. Tako velja

$$ds = |\vec{r}'|dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

Prvi korak je, da krivuljo parametriziramo, kot funkcijo $\vec{r}(t)$, ko parameter t preteče neko območje, v tem primeru interval. V našem specifičnem primeru je ustrezna parametrizacija

$$x = a\cos(t)^3 \quad \text{ter} \quad y = a\sin(t)^3, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$\ell(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\vec{r}'(t)|dt.$$

$$\vec{r}'(t) = (-3a\cos(t)^2\sin(t), 3a\sin(t)^2\cos(t))$$

$$\begin{aligned}|\vec{r}'(t)| &= \sqrt{9a^2\cos(t)^4\sin(t)^2 + 9a^2\sin(t)^4\cos(t)^2} = \\ &= 3a\sin(t)\cos(t) \cdot \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 3a\sin(t)\cos(t),\end{aligned}$$

kjer smo izraz znotraj korena nesli ven, ker je venomer pozitiven.

$$\ell(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos(t)\sin(t)\, dt = \frac{3}{2}a.$$

$$\int_K x\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos(t)^3 \cdot 3a\cos(t)\sin(t)\, dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^4\sin(t) = 3a^2 \int_0^1 t^4 dt = \frac{3}{5}a^2.$$

Sledi, da je $x_T = \frac{2}{5}a$, iz razlogov simetrije je $y_T = \frac{2}{5}a$. □

Trditev 2.15: Integral skalarnega polja po ploskvi

Naj bo $\vec{r}(u,v)$ regularna parametrizacija (maksimalen rang diferenciala) območja S, ko (u,v) pretečeta območje Δ.

$$\int_S g(x,y,z)\,dS = \int_\Delta g(\vec{r}(u,v))\,|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,du\,dv,$$

kjer je

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,du\,dv,$$

ter so E, G, F določeni glede na $\vec{r}_u$ ter $\vec{r}_v$ ter identiteto

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Primer 2.16

Izračunaj

$$\int_{\partial D} \frac{dS}{(1+x+y)^2}, \text{ kjer je } D = \{(x,y,z) \mid x+y+z+ \leq 1 \wedge x,y,z, \geq 0\}$$

Rešitev. D je tetraeder. Ker je ∂D ploskev gre za integral funkcije po ploskvi, ki je odsekoma gladka. $g(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$. Integriramo po gladkih kosih ploskve ∂D.

Najprej integriramo po ravninskem odseku, ki ga parametriziramo na sledeči način

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1-x-y).$$

Tako je $\vec{r}_x = (1,0,-1)$ ter $\vec{r}_y = (0,1,-1)$. Sledi $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1,1,1)$ ter $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{3}$.

$$\int_{S_0} g\,dS = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} g\,dy = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dy =$$
$$= \sqrt{3} \int_0^1 dx \left(\left. \frac{-1}{1+x+y} \right|_0^{1-x} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\ln(2)$$

Poglejmo še ostale robne ploskve. Ko je $y = 0$ je ustrezna parametrizacija $\vec{r}(x,z) = (x,0,z)$. Sledi $\vec{r}_x = (1,0,0)$ ter $\vec{r}_y = (0,0,1)$, zato je $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = 1$.

$$\int_{S_y} g\,dS = 1 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x)^2}\,dz = \int_0^1 \left. \frac{z}{(1+x)^2} \right|_{z=0}^{z=1-x} dx = 1 - \ln(2)$$

Iz razlogov simetrije je

$$\int_{S_x} g\,dS = \int_{S_y} g\,dS = 1 - \ln(2).$$

Sedaj izračunamo še integral po zadnjem gladkem delu

$$\int_{S_z} g\,dS = 1 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dy = \frac{-1}{2} + \ln(2),$$

kjer smo upoštevali rezultat iz izračuna integrala po S_0.

Tako je

$$\int_{\partial D} g\, dS = 2 \cdot (1 - \ln(2)) + (1 + \sqrt{3})(\ln(2) - \frac{1}{2})$$

$\square$

Komentar 2.17

Če je $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{a\}$, potem je

$$\int_S g\, dS = \int_\Delta g(x, y, a)\, dx\, dy,$$

kjer je Δ projekcija S na (x, y) ravnino.

2.3 Integral vektorskih polj po ploskvah in krivuljah

Trditev 2.18: Integral vektorskega polja po krivulji

Naj bo $\vec{r}(t)$ regularna parametrizacija krivulje $K = \{\vec{r}(t) \mid t \in [a, b]\}$. Tedaj je

$$\int_K \vec{f}\, d\vec{r} = \int_a^b \left(\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\right)\, dt,$$

kjer $\cdot$ označuje skalarni produkt.

Komentar 2.19

Če je

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, xy, z), R(x, y, z), Q(x, y, z))\,,$$

potem integral tega vektorskega polja po krivulji $\mathcal{L}$ pogosto označujemo kot

$$\int_{\mathcal{L}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}} P(x, y, z)\, dx + R(x, y, z)\, dy + Q(x, y, z)\, dz.$$

Primer 2.20

Naj bo $a > 0$ ter $\alpha \in [0, 2\pi]$. $K = S(0, a) \cap \Pi$, kjer je Π ravnina z enačbo $y = x\tan(\alpha)$. Izračunaj

$$\int_K (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

Opazimo, da želimo integrirati vektorsko polje, namreč

$$\vec{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y), \text{ zanima nas } \int_K \vec{f} d\vec{r}.$$

Če je $\vec{r} = (x, y, z) \implies d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. Integrand je sedaj skalarni produkt $\vec{f}$ ter $d\vec{r}$. Parametrizirajmo krivuljo. Kot presek ravnine ter sfere, kjer ravnina poteka skozi središče sfere dobimo glavni krog. Naš parameter bo kot, ki ga predstavlja geografska višina. Asist. prof. dr. Gregor Cigler nam svetuje, da potegnemo asa iz rokava (med vajami je dejansko pogledal v rokav svoje jopice), ter se poslužimo sferičnih koordinat. Tako je

$$x = a\cos(\theta)\cos(\varphi), \;\; y = a\cos(\theta)\sin(\varphi), \;\; z = a\sin(\theta), \;\; \theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \wedge \varphi \in [0, \pi].$$

Kot θ predstavlja geografsko višino, kot φ pa geografsko širino. V našem problemu fiksiramo $\varphi = \alpha$, kar poda ustrezno parametrizacijo glede na θ, namreč

$$\vec{r}(\theta) = (a\cos(\alpha)\cos(\theta), a\sin(\alpha)\cos(\theta), a\sin(\theta))$$
$$\implies \vec{r}'(\theta) = (-a\cos(\alpha)\sin(\theta), -a\sin(\alpha)\sin(\theta), a\cos(\theta)) \wedge \vec{f}(\vec{r}(\theta))$$
$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) = (a\sin(\alpha)\cos(\theta) - a\sin(\theta), a\sin(\theta) - a\cos(\theta)\sin(\alpha), a\cos(\theta)\cos(\alpha) - a\cos(\theta)\sin(\alpha))$$

Daljši izračun pokaže

$$\vec{f} \cdot \vec{r}' = a^2(\cos(\alpha)) - \sin(\alpha).$$

Tako je

$$\int_K \vec{f}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} a^2(\cos(\alpha) - \sin(\alpha))\, d\theta = 2\pi a^2 \left(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right)$$

Ko računamo integral vektorskega polja po krivulji moramo skrbeti še za orientacijo. Naša orientacija je bila v nasprotni smeri urinega kazalca.

Komentar 2.21

Orientacija ploskve je zvezna izbira enotskih normalnih vektorjev na celotni ploskvi. Če ima ploskev regularno parametrizacijo, potem je orientabilna, saj je

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

gotovo enotski normalni vektor, saj sta odvoda $\vec{r}(u, v)$ po parametrih linearno neodvisna (maksimalnost ranga).
Vsaka orientacija ploskve inducira tudi orientacijo njenega roba, namreč če si predstavljamo, da stojimo na ploskvi z glavo v smeri orientacijskega vektorja, potem je rob orientiran tako, da ko ga obhodimo ploskev leži na naši levi.

Trditev 2.22: Integral vektorskega polja po ploskvi

Integral vektorskega polja po ploskvi lahko pretvorimo na integral skalarnega polja po ploskvi na naslednji način

$$\int_S \vec{f}\, d\vec{S} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{N})\, dS, \text{ kjer je } \vec{N} \text{ enotska normala na } dS.$$

Če imamo regularno parametrizacijo S kot $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, kjer sta $(u, v) \in \Delta$, potlej je

$$\int_S \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\Delta \left(\vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \right) du\, dv =$$
$$\pm \int_\Delta [\vec{f}(\vec{r}(u, v)), \vec{r}_u, \vec{r}_v],$$

kjer v primeru, da je vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ usklajen z $\vec{N}$ pišemo predznak $+$, v nasprotnem primeru pa pišemo $-$.

Komentar 2.23

Pri integralu vektorske funkcije $\vec{f} = (P, Q, R)$ po orientirani ploskvi S uporabimo tudi oznako

$$\int_S \vec{f}\, d\vec{S} = \int_S P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy.$$

Za integral vektorkse funkcije po orientirani ploskvi občasno uporabimo tudi izraz pretok vektorske funkcije skozi ploskev.

Primer 2.24

Naj so $a, b, c \in \mathbb{R}$. Naj bo $S = \{(x, y, z) \mid x^+y^2 + z^2 = 1 \wedge x, y, z, \geq 0\}$. Izračunaj

$$\int_S a\, dy\, dz + b\, dx\, dz + c\, dx\, dy.$$

Rešitev. Opazimo, da je želeni integral integral vektorskega polja po ploskvi.

$$I = \int_S \vec{f} d\vec{S}, \ \ \vec{f} = (a, b, c).$$

Uvedemo sferične koordinate

$$x = \cos(\theta)\cos(\varphi), \ \ y = \cos(\theta)\sin(\varphi), \ \ z = \sin(\theta), \ \ \varphi, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}(\theta, \varphi) &= (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)) \\
\vec{r}_\theta &= (-\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)) \\
\vec{r}_\varphi &= (-\cos(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\cos(\varphi), 0) \\
\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi &= (-\cos(\theta)^2\cos(\varphi), -\cos(\theta)^2\sin(\varphi), -\cos(\theta)\sin(\theta)) = \\
&= -\cos(\theta) \cdot (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)) = -\cos(\theta) \cdot \vec{r}
\end{aligned}$$

V naši orientaciji $\vec{N}$ kaže proti izhodišču.

$$I = \int_S \vec{f}\, d\vec{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-a\cos(\theta)^2\cos(\varphi) - b\cos(\theta)^2\sin(\varphi) - c\sin(\theta)\cos(\theta)\Big)\, d\theta.$$

V pomoč nam je lahko funkcija beta, namreč:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{2p-1}\sin(x)^{2q-1} = \frac{1}{2}B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\pi}{4} a\cos(\varphi) - \frac{\pi}{4} b\sin(\varphi) - \frac{c}{2}\right) d\varphi = \frac{-\pi}{4}(a + b + c+)$$

□

Primer 2.25

$a > 0$. Naj bo

$$\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2).$$

Izračunaj cirkulacijo $\vec{f}$ vzdolž preseka roba kocke $[0, a]^3$ in ravnine $x + y + z = \frac{3a}{2}$.

Rešitev. K razpade na 6 gladkih kosov - daljic. Cirkulacija je integral vektorskega polja vzdolž sklenjene krivulje - ima fizikalno interpretacijo glede pretakanja vode ter hitrosti oz. poti delcev. Parametrizacija ene izmed daljic je

$$\vec{r}(t) = \{(t, \frac{3a}{2} - t, 0) \mid t \in [\frac{a}{2}, a]\} \implies \vec{r}_t(t) = (1, 0, -1).$$

Tako je

$$\int_{K_1} \vec{f} d\vec{r} = \int_{\frac{a}{2}}^{a} \vec{f} \cdot \vec{r}_t \, dt = \int_{\frac{a}{2}}^{a} (\frac{-9a^2}{4} + 3at - 2t^2) dt = \dots.$$

Izračunati moramo še $\int_{K_i} \vec{f} d\vec{r}$ za $i \in \{2, 3, \dots, 6\}$ □

Izrek 2.26: Gauss-Ostrogradski

Naj bo D omejeno območje v $\mathbb{R}^3$, katerega rob je sestavljen iz končnega števila gladkih ploskev. Orientiramo rob ∂D tako, da je orientacija ∂D inducirana z zunanjo normalo območja D. Naj bo $\vec{F}$ gladko vektorsko polje v okolici $D \cup \partial D$. Potem velja

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

Primer 2.27

$m, n, p > 0$ ter $a, b, c \in \mathbb{R}$. Izračunaj

$$I = \int_S x^2 dzdy + y^2 dxdz + z^2 dxdy,$$

če je naslednje formula zunanje strani ploskve S

$$\left(\frac{x-a}{m}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{n}\right)^2 + \left(\frac{z-c}{p}\right)^2 = 1.$$

Rešitev. S je plašč elipsoida s središčem v (a, b, c) ter glavnimi polosmi dolžin m, n, p.

I je integral vektorskega polja po ploskvi. Po Gaussovem izreku sledi

$$I = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(\vec{f}) dV = \int_D (2x + 2y + 2z) \, dV,$$

kjer je D predstavljen elipsoid, zato je $S = \partial D$. Pogoji za uporabo Gaussovega izreka so izpolnjeni, saj je orientacija zunanja normala D.

Pomnimo

$$\int_d x \, dV = x_T \cdot V(D),$$

kjer je x_T x-koordinata težišča in $V(D)$ volumen območja D. Očitno je x-koordinata težišča v primeru naše elipsoide natanko a. Ker je razteg linearna transformacija prav tako hitro izpeljemo, da je $V(D) = \frac{4}{3}\pi \cdot mnp$ (kroglo raztezamo za faktor m v smeri x, $\dots$).

Ako bi nadaljevali računsko bi faktor mnp dobili, ko bi elipsoido parametrizirali s polarnimi koordinatami, ter izračunali vrednost Jacobijeve matrike. Tako dobimo

$$I = \frac{8}{3}\pi \cdot mnp \cdot (a+b+c)$$

□

Primer 2.28

$\vec{f}(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 \cdot \vec{r}$ ter $b > 0$. Izračunaj pretok $\vec{f}$ skozi

- rob območja $D = \{(x,y,z) \mid 2z \geq x^2+y^2, z \leq b\}$
- ploskev $2z = x^2+y^2$, kjer je $z \leq b$

Rešitev. Pretok je integral vektorskega polja po ploskvi. Robova območja D sta $S = z = \frac{x^2+y^2}{2}, z \leq b$ ter krožnica $2z = 2b = x^2+y^2$. Pretok skozi S je

$$\int_S \vec{f} d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(\vec{f}) dV,$$

kjer smo prvo enakost zapisali po Gaussovem izreku. Če f zapišemo v kanoničnih koordinatah dobimo

$$\vec{f} = \Big((x^2+y^2+z^2)x, (x^2+y^2+z^2)y, (x^2+y^2+z^2)z\Big) \implies \operatorname{div}(\vec{f}) = 5(x^2+y^2+z^2).$$

Tako je želen integral enak

$$5\int_D x^2+y^2+z^2 dV.$$

Žal integral nima fizikalne interpretacije kot npr. vztrajnostni moment (kot se je zgodilo pri prejšnji nalogi), kar pomeni, da ga moramo izračunati sami. Vpeljemo cilindrične koordinate $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi), z = z$. Parametri φ,r ter z zaporedoma tečejo po $[0, 2\pi)$, $[0, \sqrt{2b}]$ ter $[\frac{r^2}{2}, b]$. Integral se tako pretvori v

$$5\int_D (x^2+y^2+z^2)dV = 5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2b}} dr \int_{\frac{r^2}{2}}^b (r^2+z^2)(r)\, dz = 10\pi(\frac{b^3}{3} + \frac{b^4}{4}),$$

kjer smo integrand pretvorili upoštevajoč novi spremenljivki ter Jacobijevo matriko po spremembi spremenljivk, izračun integrala pa smo spustili.

Pojdimo na drugo točko. S_b je tukaj krog, ki ga določi druga enačba. Ker je $\partial D = S \cup S_b$ velja po aditivnosti integrala

$$\int_S \vec{f} d\vec{S} = \int_{\partial D} \vec{f} d\vec{S} - \int_{S_b} \vec{f} d\vec{S},$$

sledi, da je

$$\int_{S_b} \vec{f} d\vec{S} = \int_{S_b} \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_b} (zx^2+zy^2+z^3) dS = \int_{S_b} bx^2+by^2+b^3 dS,$$

upoštevajoč aditivnost ter odsotnost arugmenta tretjega integrala dobimo, da je zgornji izraz enak

$$b^3(2\pi b) + \int_{S_b} (x^2+y^2) dS = b^3(2\pi b) + (2\pi b^2),$$

kjer smo zadnji integral izračunali po uvedbi polarnih spremenljivk.

Izračunali smo integral po odsekanem delu rotirane parabole ter po omejujočem krogu, kar pomeni, da je njuna vsota enaka integralu po celotni meji območja S. □

Komentar 2.29: O izbiri parametrov

Najprej smo izbrali φ, ki gotovo teče po $[0, 2\pi)$. Za vsak φ na tem intervalu bo za nek r na $[0, \sqrt{2b}]$ izbrano neko podobmočje. Vse ustrezne izbire z-ja so potem seveda višje od $\frac{r^2}{2}$, ter nižje od b.

Izrek 2.30: Greenova formula

Naj bo D omejeno območje v ravnini, katerega rob je sestavljen iz končnega števila gladkih lokov in je pozitivno orientirana. Naj sta P in Q gladki funkciji na $D \cup \partial D$. Tedaj je

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Primer 2.31

Izračunaj

$$I = \int_K \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

kjer je $K \subseteq \mathbb{R}^2$ sklenjena krivulja, ki

- Ne obkroži izhodišča.
- Obkroži izhodišče.

Rešitev. Omejimo se na primer $K = \partial D$, za območje D s kosoma gladkim robom. V prvem primeru lahko predpostavimo, da $(0, 0) \notin D$. Uporabimo Greenovo formulo za $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ter $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, ki sta gladki dokler $(0, 0) \notin D$. Tako se želeni integral pretvori v obliko

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D (Q_x - P_y) dxdy = \int_D \left(\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dxdy = 0.$$

V drugem primeru je strategija naslednja: iz D izrežemo dovolj majhen krog $K((0, 0), \varepsilon)$, da je $\overline{K}((0, 0), \varepsilon) \subset \text{Int}(D)$ (če bi sledili prejšnji metodi bi dobili divergentni integral). Ideja je, da sedaj izračunamo integrala po notranji krožnici $\partial K((0, 0), \varepsilon)$ ter po $D \setminus K((0, 0), \varepsilon)$, nato pa po Greenovi formuli razberemo integral po krivulji kot razliko slednjega in prvega. Definirajmo $D' = D \setminus K((0, 0), \varepsilon)$, kar implicira $\partial D' = K \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \varepsilon^2\} = K \cup C$. Tako po Gaussovem izreku velja

$$\int_{D'} \text{div}(\vec{f}) dS = \int_{\partial D'} \vec{f}\, d\vec{r} = \int_{K^+} f\, d\vec{r} + \int_{C^-} f\, d\vec{r}.$$

V prejšnjem primeru smo že izračunali divergenco polja $\vec{f}$ ter ugotovili, da je enaka 0. Tako je skrajno levi integral enak 0. Poskrbeti moramo le še za orientacijske težave, namreč ∂D je orientiran pozitivno, med tem ko je S orientiran negativno. Tako sledi, da je integral $\vec{f}$ po $K = \partial D$ enak integralu $\vec{f}$ po C.

$$\int_{K^+} \vec{f}\, d\vec{r} = -\int_{C^-} \vec{f} d\vec{r} = \int_{C^-} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \sin(\varphi) \cdot \varepsilon \sin(\varphi) - (-\varepsilon \cos(\varphi)) \cdot \varepsilon \cos(\varphi)}{\varepsilon^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi,$$

kjer smo negativno orientiran krog parametrizirali kot $x(\varphi) = -\varepsilon \cos(\varphi)$ ter $y(\varphi) = \varepsilon \sin(\varphi)$.

Tako za vse sklenjene gladke krivulje K, ki obkrožijo izhodišče, velja, da je

$$\int_{K^+} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2\pi$$

$\square$

Komentar 2.32

Kar smo storili je pretvorili integral po poljubni gladki sklenjeni krivulji na integral po krožnici. To smo lahko storili, saj sta objekta homotopna.

Primer 2.33

Naj so $\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n} \in \mathbb{R}^3$ različni in $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}$. Definiramo

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \nabla\left(\frac{-e_i}{4\pi\, |\vec{r} - \vec{r_i}|}\right).$$

Izračunajmo pretok $\vec{f}$ skozi zaključeno ploskev, ko objema točke $\{\vec{r_i}\}$.

Rešitev. Naj bo $S = \partial D$ ter $\{\vec{r_i}\}$ v $\mathrm{Int}(D)$. Radi bi se polsužili Gaussovega izreka, a imamo težavo, saj ima $\vec{f}$ singularnosti pri $\{\vec{r_i}\}$, zato naredimo isto kirurško operacijo kot pri nalogi zgoraj. Okoli vsakega vektorja v $\{\vec{r_i}\}$ izrežemo kroglo z radijem ε_i, tako, da se zaprtja krogel ne sekajo. Če bomo na kirurško spremenjenem območju uporabili Gaussov izrek, bo integral divergence enak 0, saj iz že rešene naloge vemo

Trditev 2.34

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\vec{r} - \vec{a}}\right) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\vec{r} - \vec{a}}\right)) = 0.$$

Naj bo

$$D' = D \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K(\vec{r_i}, \varepsilon_i).$$

Sedaj lahko na območju D' uporabimo Gaussov izrek, saj $\vec{f}$ na tem območju nima singularnosti.

$$\int_{\partial D'} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_{D'} \operatorname{div}(\vec{f})\, dV = 0$$

Ker je $\partial D' = \partial D \cup (\bigcup_{i=1}^n \partial K(\vec{r_i}, \varepsilon_i))$ sledi

$$0 = \int_{\partial D^+} \vec{f}\, d\vec{S} + \sum_{i=1}^n \int_{\partial K_i^-} \vec{f}\, d\vec{S}$$

$$\implies \int_{\partial D^+} \vec{f}\, d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \int_{\partial K_i^+} \vec{f}\, d\vec{S}.$$

Posamezen izmed integralov na desni je enak

$$\int_{\partial K_i^+} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_{\partial K_i^+} \sum_{i=1}^n \nabla \frac{-e_j}{4\pi\, |\vec{r} - \vec{r_i}|} = \sum_{i=1}^n \int_{\partial K_i^+} \frac{e_j}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3},$$

ker pa je po Gaussovem izreku za $i \neq j$ (za našo funkcijo $\vec{f}$ namreč velja $\nabla \cdot \nabla \vec{f} = 0$)

$$\int_{\partial K_i} \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}\, d\vec{S} = 0$$

sledi

$$\int_{\partial K_i^+} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_{\partial K_i} \frac{e_i}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}\, d\vec{S}.$$

Obenem je vektor $\frac{\vec{r}-\vec{r_i}}{|\vec{r}-\vec{r_i}|}$ normalen na ∂K_i, zato lahko zapišemo $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, kjer je $\vec{n} = \frac{\vec{r}-\vec{r_i}}{|\vec{r}-\vec{r_i}|}$ kar pomeni

$$\int_{\partial K_i} \frac{e_i}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}\, d\vec{S} = \frac{e_i}{4\pi} \int_{\partial K_i} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^2} dS.$$

∂K_i parametriziramo kot

$$\{(\varepsilon_i \cos(\theta)\cos(\varphi), \varepsilon_i \cos(\theta)\sin(\varphi), \varepsilon_i \sin(\theta) + \vec{r_i} \mid \theta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

kar pomeni

$$\int_{\partial K_i} \frac{1}{|r - r_i|^2} dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon_i^2 \cos(\theta)}{\varepsilon_i^2}\, d\theta = 2\pi \cdot \sin(\theta)\Big|_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

Druga možnost je, da opazimo, da je funkcija $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^2}$ na ∂K_i identično enaka ε_i^2, kar omogoča izračun

$$\int_{\partial K_i} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^2}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_i^2} P(K_i) = \frac{1}{\varepsilon_i^2} 4\pi\varepsilon_i^2 = 4\pi.$$

Posledično je

$$\int_{\partial D^+} \vec{f}\, d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{4\pi} \cdot \int_{\partial K_i} \vec{f}\, d\vec{S} = \sum_{i=1}^n e_i$$

□

Izrek 2.35: Stokes

Naj bo M omejena gladka orientirana ploskev razreda $\mathcal{C}^2$, katere rob je sestavljen iz končnega števila gladkih lokov. Orientacija ∂M naj bo inducirana iz orientacije M. Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$, definirano v okolici množice $M \cup \partial M$. Potlej je

$$\int_{\partial M} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_M \operatorname{rot}(\vec{F})\, d\vec{S}.$$

Komentar 2.36

Na daljši način zapišemo Stokesov izrek za funkcijo $\vec{F} = (P, Q, R)$ kot

$$\int_{\partial M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$\int_M \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

V primeru, ko je $R = 0$, P ter Q pa sta odvisna le od x in y dobimo Greenovo formulo.

Primer 2.37

$$I = \int_S (1 + x^2) f(x)\, dydz - 2xyf(x)\, dzdx - 3z\, dxdy.$$

Določi $f \in \mathcal{C}^1$, da je I enak za vse omejene ploskve S, katerih rob je krožnica $\{(\cos(t), \sin(t), 1) \mid t \in [0, 2\pi]\}$. Za vsak f določi tudi I.

Rešitev. Definiramo

$$\vec{f} = ((1 + x^2) f(x), -2xyf(x), -3z) \implies I = \int_S \vec{f}\, d\vec{S}$$

Če imamo dve ploskvi, S_1 in S_2, ki imata za rob našo krožnico, ena izmed katerih poteka v pozitivni smeri z osi, druga pa poteka v negativni smeri z osi, potem je njuna unija meja nekega območja $S_1^+ \cup S_2^- = \partial D^+$. Po Gaussovem izreku na D velja

$$\int_{\partial D} \vec{f} d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(f) dV.$$

Tako sledi, da je

$$\operatorname{div}(f) = 0 \implies \int_{\partial D^+} = \int_{S^+} - \int_{S^-} = 0$$

Od prej že vemo, da je $\vec{f}$ solenoidalno $\iff$ $f(x) = 3\arctan(x) + c$. Tako je solenoidalnost $\vec{f}$ zadosten pogoj za enakost vseh integralov $\vec{f}$ po ploskvah z robom na krožnici. Sedaj izračunamo integral I tako, da izberemo ploskev S_0, ki je enaka izbranemu krogu. Dobimo

$$\int_{S_0} \vec{f} d\vec{S} = -3\pi.$$

□

Komentar 2.38

Da se pokazati, da je solenoidalnost $\vec{f}$ tudi potrebni pogoj. Okvirno bi to storili na naslednji način: izberemo poljubno točko v definicijskem območju in okoli nje naredimo poljubno majhno kroglo. Obe hemisferi napeljemo na krožnico ter vidimo, da v limiti dobimo ničelnost divergence.

Primer 2.39

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ter $b \in \mathbb{R}^3$. $\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{r} - \vec{b})$. Izračunaj cirkulacijo $\vec{F}$ vzdolž krivulje K, ki jo tvorijo vsi vektorji, za katere velja

$$|\vec{r}| = |\vec{a}| \text{ ter } \vec{r} \cdot \vec{a} = \frac{|\vec{a}|^2}{2}.$$

Rešitev. Prvi pogoj pove, da je $\vec{r}$ na krogli s središčem v izhodišču ter radijem $|\vec{a}|$, v drugem pogoju pa prepoznamo enačbo ravnine z normalo $\vec{a}$, ki vsebuje točko $\frac{1}{2} \cdot \vec{r}$. Njun presek je krožnica K, ki je rob kroga B. Zanima nas

$$\int_K \vec{f}\, d\vec{r} = \int_B \operatorname{rot}(\vec{f})\, d\vec{S},$$

kjer enakost sledi po Stokesovem izreku. Normala B je $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Velja

$$\operatorname{rot}(\vec{F}(\vec{r})) = \operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{r} - \vec{a} \times \vec{r} - \vec{r} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}) = \operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{a} - \vec{r} \times \vec{b}) = -2\vec{a} + 2\vec{b},$$

kjer smo uporabili že od prej znano identiteto

Trditev 2.40

$$\operatorname{rot}(\vec{r} \times \vec{c}) = -2\vec{c}$$

Želen integral se tako pretvori v

$$\int_B 2\frac{(\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{a}|}\, dS = 2\frac{(\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{a}|} P(B).$$

Sedaj iščemo le še ploščino B, gotovo je enaka $P(B) = \pi b^2$, kjer je b radij krožnice. Iz Pitagorovega izreka izračunamo, da je $|\vec{r}|^2 = b^2 + \left|\frac{1}{2}\vec{r}\right| \implies b^2 = \frac{3}{4}|\vec{r}|^2$. □

Primer 2.41

Naj bo K zaključena krivulja na enotski sferi. Izračunaj

$$I = \int_K \frac{dx + dy + dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Rešitev. Pravzaprav računamo integral

$$I = \int_K \vec{f}\, d\vec{r},$$

kjer je $\vec{f}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}(1, 1, 1)$. Obenem je $\vec{f}(\vec{r}) = (1, 1, 1)$ za vse $\vec{r} \in S_1$. Uporabimo Stokesov izrek in integriramo rotor po neki ploskvi, katere meja je K, dobimo 0.

Če je krivulja K tako grda, da ni meja ploskve bi pa v primeru, da je $\vec{f}$ potencialno polje (gradient nekega skalarnega polja) in K krivulja z začetkom a in koncem b, veljalo

$$\int_K \vec{f}\, d\vec{r} = u(b) - u(a).$$

V primeru, da je K zaključena je integral enak 0.

V našem primeru $\vec{f}$ ni potencialno, ampak $\vec{g}(\vec{r}) = (1, 1, 1)$ je; obenem velja $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r})$ za $r \in S_1$. Ničelnost $\nabla \times \vec{g} = \mathrm{rot}(\vec{g})$ dobimo z direktnim izračunom, lahko pa tudi opazimo, da je $\nabla(x, y, z) = (1, 1, 1) = \vec{g}$, zato je $\vec{g}$ potencialno polje, posledično je njegov rotor na zvezdastem območju ničelen. □

Primer 2.42

Naj bo $h > 0$ ter $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}$. Izračunaj pretok $\vec{f}$ skozi plašč in osnovno ploskev stožca $x^2 + y^2 \leq z^2$ za $z \in [0, h]$

Rešitev. Prvi pristop je računski, integral na plašču stožca je 0 iz razlogov pravokotnosti, na osnovni ploskvi pa znamo izračunati.

Drugi pristop je pa z Gaussovim izrekom, kjer izberemo območje notranjosti stožca. Tako je

$$\int_{\partial D} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_D \mathrm{div}(\vec{f})\, dV = \int_D 3\, dV = 3 \cdot \frac{\pi}{3} h^3 = \pi h^3.$$

Obenem je

$$\int_{\partial D} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_S \vec{f}\, d\vec{S} + \int_A \vec{f}\, d\vec{S} = 0 + \int_A \vec{f}\, d\vec{S},$$

kje je S plašč stožca, A pa njegova osnovnica. □

Primer 2.43

Določi privlačno silo med točkastim telesom z maso m_0, ki je v izhodišču, ter homogeno severno polsfero z maso M, ki ima središče v izhodišču ter radij $a > 0$.

Rešitev. Privlačna sila med točkastima telesoma z masama m_1 ter m_2 ter medsebojno razdaljo r ima enačbo

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

V našem primeru izberemo zelo majhen delček sfere, ki naj ima maso $dm = \rho \cdot dS$, kjer je ρ lahko praviloma odvisen od delčka dS, v našem homogenem primeru pa je $\rho = \frac{M}{2\pi a^2}$.

S svojo fizikalno intuicijo izpeljemo privlačno silo med točkastim telesom v izhodišču ter delčkom dS kot

$$dF = G\frac{m_0}{a^2} \cdot dm = G\frac{m_0 \cdot \rho}{a^2}\, dm.$$

Iz razlogov simetrije vemo, da bo rezultanta kazala vertikalno, zato nas pravzaprav zanima le vertikalna komponenta sile dF, ki jo označimo z dF' ter velja

$$dF' = G\rho \cdot \frac{m_0}{a^2} \cos(\alpha)\, dm,$$

kjer je α kot med z osjo ter vektorjem dF. Uvedemo polarne koordinate

$$x = a\cos(\theta)\cos(\varphi), \;\; y = a\cos(\theta)\sin(\varphi), \;\; z = a\sin(\theta).$$

Če so (x, y, z) koordinate točke, ki določa dS, potem je $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$. Tako je

$$dF' = G\rho\frac{m_0}{a^2}\cos(\theta - \frac{\pi}{2})dS.$$

Od prej že vemo, da je

$$dS = a^2\cos(\theta)\, d\theta d\varphi, \;\; \text{saj je } \sqrt{EG - F^2} = a\cos(\theta).$$

Sledi

$$F = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} G\rho\frac{m_0}{a^2}\sin(\theta)a^2\cos(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} Gm_0\rho \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)\, d\theta =$$
$$(2\pi)Gm_0\frac{M}{2\pi a^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\, d\theta = \frac{Gm_0M}{2a^2}$$

□

Primer 2.44

$D \subseteq R^3$ območje z gladkim robom in prostornino V. $a \in \mathbb{R}^3$. Izračunaj

$$I = \int_{\partial D} (\vec{r} \times \vec{a}) \times \, d\vec{S}$$

Rešitev. Dvomljivcem v riguroznost postavljenega problema priporočam, da si zapišejo $(\vec{r} \times \vec{a}) \times \, d\vec{S} = (\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{n}\, dS$ ter integral obravnavajo kot integral vektorskega polja po ploskvi.

Iz Algebre 1 pomnimo

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}.$$

Tako sledi

$$(\vec{r} \cdot \vec{a})d\vec{S} = (\vec{r} \cdot d\vec{S})\vec{a} - (\vec{a} \cdot d\vec{S})\vec{r}.$$

Ker je $d\vec{S} = \vec{n}dS$ sledi

$$d\vec{S} = \vec{n}dS = (\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{a}\, dS - (\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{r}\, dS.$$

Tako je

$$I = \left(\int_{\partial D} (\vec{r} \cdot \vec{n}) dS\right) \vec{a} - \left(\int_{\partial D} (x\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS, \int_{\partial D} (y\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS, \int_{\partial D} (z\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS\right)$$

Prvi integral je enak

$$\int_{\partial D} \vec{r} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial D} \vec{r}\, d\vec{S} = \int_D \operatorname{div}(\vec{r})\, dV = 3 \int_D dV.$$

Pri drugem integralu imamo

$$\int_{\partial D} (x\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \operatorname{div}(x\vec{a}) dV = a_1 \cdot \int_D dV.$$

Iz razlogov simetrije je

$$\left(\int_{\partial D} (x\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS, \int_{\partial D} (y\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS, \int_{\partial D} (z\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS\right) = \vec{a} \cdot V(D),$$

iz česar sledi

$$I = 3V(D) \cdot \vec{a} - V(D) \cdot \vec{a} = 2V(D) \cdot \vec{a}$$

□

Primer 2.45

Dokaži, da je za $\vec{f} = (2x\cos(y) - y^2 \sin(x), 2y\cos(x) - x^2 \sin(y), 4)$

$$\int_K \vec{f}\, d\vec{r}$$

enak za vse krivulje K med $(0, 0, 0)$ in $(5, 3, \pi)$ ter ga izračunaj za krivuljo

$$K_0 = ((\cos(t), \sin(t), t) \mid t \in [-2\pi, 2\pi]).$$

Rešitev. Gotovo je zadosten pogoj za enakost vseh integralov potencialnost polja $\vec{f}$. V daljni preteklosti smo že izračunali, da je polje potencialno, kar implicira željeno. Ker je območje zvezdasto moramo le preveriti ničelnost rotorja, da izvemo, da je polje potencialno, a ker želimo vedeti tudi kaj točno je potencial se moremo poslužiti davne metode integriranja. Velja

$$\nabla u(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}), \text{ za } u(x, y, z) = x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x) + 4z.$$

Sedaj le še vstavimo v enačbo

$$\int_K \vec{f}\, d\vec{r} = u(b) - u(a),$$

kjer je b končna točka in a začetna točka, da dobimo želen odgovor. □

Literatura

[1] asist. prof. dr. Gregor Cigler. *Vaje iz Analize 2b*. 2025.