3. izbirni test za MMO 2025

Hugo Trebše (hugo.trebse@gmail.com)

10. maj 2025

1 Prva naloga

Naloga 1.1: Bolgarija 2025

Določi vsa praštevila p, za katera obstajata taki naravni števili x ter y, da je

$$p + 49 = 2x^2 \text{ ter } p^2 + 49 = 2y^2.$$

Rešitev. Enačbi najprej odštejemo

$$p(p-1) = 2(y-x)(x+y), \tag{1}$$

nato pa ju obe pomnožimo s 4 ter seštejemo

$$(2p+1)^2 + 391 = 8(x^2+y^2). \tag{2}$$

Poglejmo enačbo (1). Osnovna lastnost praštevil je naslednja implikacija

$$p \mid x \cdot y \implies p \mid x \text{ ali } p \mid y.$$

Če $p \mid 2$ je $p = 2$, kar očitno ni rešitev. Če $p \mid y - x$ je

$$y - x \geq p \implies (y-x)(y-x-1) \geq 2(y-x)(x+y).$$

Ker sta x ter y različni ter je $y \geq x$ lahko neenačbo delimo

$$-1 \geq 3x + y.$$

Te neenačbe ne izpolnita nobeni naravni števili x ter y.

Ostane le še možnost

$$p \mid x + y \implies x + y = k \cdot p.$$

Če definiramo $c = \frac{2}{k}$ se enačba (2) glasi.

$$(c(x+y)+1)^2 + 391 = 8(x^2+y^2).$$

Komentar 1.2

Če je na primer $c \leq 1$ enačba gotovo ne bo imela neskončno rešitev, saj je za »velike« x ter y desna stran mnogo večja od leve. To ugotovitev poskusimo formalizirati.

Denimo, da je $c \leq 1$. Sledi

$$\begin{aligned}
(x+y+1)^2 + 391 &\geq 8(x^2+y^2) \\
x^2 + y^2 + 392 + 2xy + 2x + 2y &\geq 8(x^2+y^2) \\
394 &\geq (y-x)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 + 5(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

Posledično velja

$$\frac{394}{5} = 78.8 \geq x^2 + y^2 \implies 9 \geq x, y.$$

Iz začetnih enačb je razvidno, da sta $x, y \geq 6$, zato sledi $6 \leq x, y \leq 9$.

Če je $c > 1$ sledi $2 > k$, kar pomeni, da je $k = 1$, oziroma

$$x + y = p.$$

Po enačbi (1) sledi

$$x + y - 1 = 2(y - x) \iff y = 3x - 1 \implies p = 4x - 1.$$

Iz pogoja naloge sledi, da je

$$4x - 1 + 49 = 2x^2 \iff x^2 - 2x - 24 = 0 \iff (x - 1)^2 = 25.$$

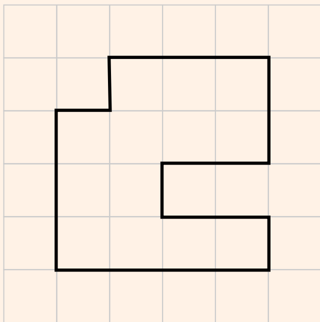
Ker je $x \in \mathbb{N}$ je $x = 6$, $y = 3 \cdot 6 - 1 = 17$ ter $p = 4 \cdot 6 - 1 = 23$.

Sedaj moramo le še računsko obravnavati primere, ko sta $6 \leq x, y \leq 9$, ter preveriti, da je $(p, x, y) = (23, 6, 17)$ dejansko rešitev. To prepustimo bralcu (bralcu je dovoljeno tudi, da ta korak preskoči). $\square$

2 Tretja naloga

Naloga 2.1: Turčija 2025

Podana je neskončna kvadratna mreža. *Fronta* je sklenjena lomljena črta, ki ne seka in se ne dotika same sebe, sestavljena iz končnega števila daljic, ki potekajo po stranicah kvadratne mreže, in imajo oglišča v ogliščih kvadratne mreže. Pravimo, da je kvadrat mreže *mejen*, če vsaj ena izmed njegovi stranic leži na fronti, in *ogrožen*, če natanko tri izmed njegovih stranic ležijo na fronti. Z M ter N zaporedoma označimo število mejnih ter ogroženih kvadratov mreže.
Na spodnjem diagramu je primer fronte, za katero je $M = 28$ ter $N = 2$.



Primer fronte.

Določi največje realno število c, za katerega je neenakost

$$M > cN$$

izpolnjena za vse fronte.

Rešitev. Dokazali bomo, da je
$$c = \frac{3}{2}.$$

Potrebnost $c \leq \frac{3}{2}$

Najprej pokažemo, da je $c \leq \frac{3}{2}$. Definirajmo *smreko* višine n kot fronto, ki ga dobimo z vertikalnim zlaganjem front oblike plus. Primer smreke višine 4 je na sliki, v vsaki celici je zapisano število stranic, ki jih celica deli s fronto.

0	0	1	0	0
0	2	3	2	0
1	3	0	3	1
0	3	2	3	0
1	3	0	3	1
0	3	2	3	0
1	3	0	3	1
0	3	2	3	0
1	3	0	3	1
0	2	3	2	0
0	0	1	0	0

Na podlagi konstrukcije smreke konstruiramo *smrekov gozd* višine n ter širine k kot k smrek, položenih vzporedno, tako da sta si sosednji smreki oddaljeni za enoto, nato pa njihove »korenine« povežemo. Primer smrekovega gozda višine 4 ter širine 4 je na sliki.

0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	2	3	2	0	2	3	2	0	2	3	2	0	2	3	2	0
1	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	1
0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0
1	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	1
0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0
1	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	1
0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0
1	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	1
0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0	3	2	3	0
1	3	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	3	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Naj a_1, a_2 ter a_3 zaporedoma označujejo število mejnih kvadratov, ki imajo 1, 2 ali 3 stranice na fronti. Tako je

$$M = a_1 + a_2 + a_3 \text{ ter } N = a_3$$

Nekaj računovodstva pokaže, da za smrekov gozd višine n ter širine k velja

$$\begin{gathered} a_3 = (k-2)(4n+1) + 8n = 4kn + k - 2 \\ a_2 = kn + 2k + 2 + (k-1)n + 4(k-1) + 1 = 2kn - n + 6k - 1 \\ a_1 = k + 2n + (k-1) + 2 + 4(k-1) + 1 = 2n + 6k - 2 \end{gathered}$$

Tako velja, da je

$$\frac{M}{N} = \frac{a_3 + a_2 + a_1}{a_3} = \frac{6kn + n + 13k - 5}{4kn + k - 2}.$$

Če je $k = n$ je razmerje enako

$$\frac{6n^2 + 14n - 5}{4n^2 + n - 2} = \frac{3}{2} + \frac{25n - 4}{8n^2 + 2n - 4},$$

ter se približuje $\frac{3}{2}$. Če bi veljalo $c > \frac{3}{2}$ bi za dovolj velike n razmerje zadostilo neenakosti

$$c > \frac{M}{N} > \frac{3}{2},$$

kar je nemogoče po definiciji c. Tako velja $c \leq \frac{3}{2}$.

Zadostnost $c = \frac{3}{2}$

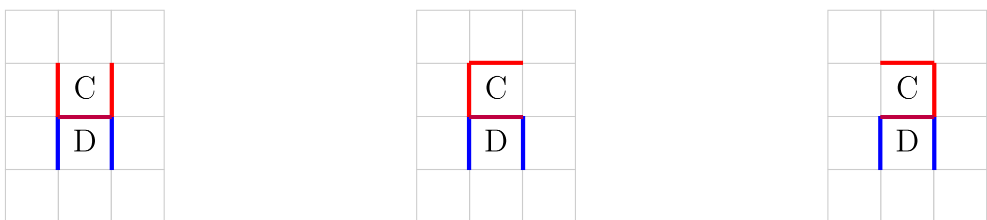
Sedaj pokažemo, da $c = \frac{3}{2}$ izpolnjuje pogoj

$$M > \frac{3}{2} \cdot N \iff 2 \cdot (a_2 + a_1) > a_3.$$

Celico imenujemo *dobra*, če ima 3 stranice na robu fronte, oziroma jo imenujemo *slaba*, če ima 1 ali 2 stranici na robu fronte. Celica je *sosednja* drugi celici, če si delita stranico, ki je prav tako del fronte.

Trditev. *Dobra celica ima slabega soseda.*

Dokaz. Dobra celica seveda ne more imeti zgolj sosedov, ki niso niti dobri niti slabi. Denimo, da bi imela neka dobra celica same dobre sosede. Dobro celico označimo z D ter brez škode za splošnost predpostavimo, da je stranica dobre celice, ki ni del fronte, ravno spodnja meja celice D. Ker si D zgornjo mejo deli z dobro celico C ločimo tri možnosti.



Vse tri možnosti vodijo do tega, da fronta seka samo sebe, kar ni mogoče. □

Trditev. *Slaba celica ima kvečjemu dva soseda.*

Dokaz. Očitno. □

Trditev. *Velja*

$$2 \cdot (a_2 + a_1) \geq a_3.$$

Dokaz. Definirajmo s kot **število parov sosednjih celic, izmed katerih je ena celica dobra ter ena celica slaba**. Neenakost

$$s \geq a_3$$

je očitna, saj ima vsaka dobra celica vsaj enega slabega soseda. Neenakost

$$2(a_2 + a_1) \geq s$$

sledi, ker ima vsaka slaba celica (teh je $a_2 + a_1$) največ dva dobra soseda, saj ima kvečjemu dva soseda. □

Trditev. *Velja*

$$2 \cdot (a_2 + a_1) > a_3.$$

Dokaz. Denimo, da bi v prejšnji trditvi veljala enakost. Ker ima vsaka slaba celica največ dva soseda mora veljati, da ima vsaka slaba celica natanko dva soseda. Če je $a_1 \neq 0$ je to seveda nemogoče. Gotovo pa obstaja celica, ki si deli natanko eno stranico s fronto, vzamemo lahko na primer najvišjo vodoravno premico, katera vsebuje neko stranico fronte. Direktno nad to premico bo celica, ki si deli natanko eno stranico s fronto. □

□