14. Evropska dekliška matematična olimpijada na Kosovu

Ana Meta Dolinar in Hugo Trebše

6. avgust 2025

Med 11. in 17. aprilom je v Prištini potekala 14. Evropska dekliška matematična olimpijada (EGMO). Slovenske tekmovalke so bile **Sara Ferreira** (Gimnazija Škofja Loka), **Ekaterina Chizhova**, **Particia Király** (obe Gimnazija Bežigrad) ter **Naja Oblak** (Gimnazija Vič). Spremljevalca ekipe sta bila Ana Meta Dolinar in Hugo Trebše.

Slika 1: Ekipa s spremljevalcema (Hugo, Patricia, Naja, Sara, Ekaterina, Ana Meta)

Slovenija se je odlično odrezala in prvič v zgodovini osvojila kar **dve srebrni medalji** – s Kosova sta se z njima vrnili Ekaterina in Patricia. Obe sta v celoti rešili tri naloge od šestih in poleg tega pridobili tudi delne točke na ostalih nalogah. Ekaterina je osvojila 17. mesto med vsemi 135 Evropejkami, Patricia pa 23. mesto. To sta **najboljši individualni uvrstitvi Slovenk, odkar sodelujemo na olimpijadi EGMO**. Uspeh sta dopolnili Naja in Sara, ki sta s popolno rešitvijo vsaj ene naloge osvojili pohvalo. Slovenija je tako po skupnem dosežku 15. med 35 evropskimi državami.

Letos so se naloge izkazale za precej težke, in izmed 219 tekmovalk iz 56 držav jih je le ena uspela rešiti vseh šest. Po skupnem seštevku točk celotne ekipe je bila prva Kitajska, med evropskimi državami pa je prvič zmagala Italija.

Tekmovalke so dva dni po 4 ure in pol reševale 6 nalog. Poleg tekmovanja so imele organiziranih tudi več različnih družabnih dejavnosti ter ekskurzijo v zgodovinsko mesto Prizren.

Najbolje reševana naloga je bila četrta (geometrija). **Le 25 deklet je uspelo rešiti peto nalogo, med njimi tudi Patricia.** Naloga z rešitvijo je vključena v nadaljevanju članka.

Poleg ekipe so slovensko delegacijo sestavljali še koordinatorji Lenart Dolinar, Lovro Drofenik in Luka Horjak, ki so s strani organizatorjev pomagali pri nepristranskem ocenjevanju nalog.

Slika 2: Ekaterina s srebrno medaljo

Slika 3: Patricia z maskoto med tekmovanjem

1 1. naloga

Naloga 1. Za naravno število N naj bodo $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ vsa naravna števila manjša od N, ki so tuja N. Poišči vse $N \geq 3$, za katere velja

$$D(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

za vsak $1 \leq i \leq m - 1$.

Izraz $D(a, b)$ predstavlja največje naravno število, ki deli a in b. Celi števili a in b sta si tuji, če je $D(a, b) = 1$.

Rešitev. S poskušanjem na manjših primerih ter z nekaj intuicije pridemo do domneve, da pogoju naloge zadoščajo natanko vsa soda števila in vse popolne potence števila 3.

Če je N sodo število, so vsa števila c_i liha. Ker je vsota dveh lihih števil soda, sledi $2|D(N, c_i + c_{i+1})$ za vse i. Največji skupni delitelj je zato večji od 1.

Obravnavajmo primer, ko je $N = 3^k$ za nek $k \geq 1$. Tedaj so števila med 1 ter N, ki so tuja N, natanko števila, ki niso deljiva s 3. V tabeli zapišimo člene c_i ter njihove ostanke pri deljenju s 3.

i	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$	$m-1$	m
c_i	1	2	4	5	7	8	10	$\dots$	$N-2$	$N-1$
$c_i \pmod 3$	1	2	1	2	1	2	1	$\dots$	1	2

Opazimo, da sta zaporedna člena niza $\{c_i\}$ po modulu 3 vedno 1 in 2 (v nekem vrstnem redu), kar pomeni, da je njuna vsota zagotovo deljiva s 3. Sledi, da vsota katerihkoli zaporednih členov zaporedja ni tuja N, saj je N tudi deljiv s 3.

Sedaj pokažimo, da ostala naravna števila ne izpolnjujejo pogoja. Denimo, da obstaja liho število N, ki ni potenca števila 3, a izpolnjuje pogoj naloge.

Ker je N liho število, je $c_1 = 1$ ter $c_2 = 2$, zato velja

$$1 \neq D(N, c_1 + c_2) = D(N, 1 + 2) = D(N, 3),$$

kar pomeni, da $3 \mid N$. Sledi, da mora biti N oblike $N = 3^k \cdot M$, kjer je $M > 1$ ter $3 \nmid M$. Ločimo dva primera glede na ostanek števila M pri deljenju s 3.

Primer 2.1: Če je $M \equiv 1 \pmod 3$, sta števili $M+1$ ter $M-2$ tuji N. Obe števili nista deljivi s 3, če pa bi bili deljivi s katerimkoli praštevilskim deliteljem p števila M, bi tak p delil tudi 1 ali -2. To bi bilo mogoče le v primeru sodega praštevilskega delitelja, kar pa je v protislovju s predpostavljeno lihostjo N. Ker sta M ter $M-1$ zaporedoma deljivi z M ter s 3, M in $M-1$ nista tuji N, torej sta $M-2$ ter $M+1$ zaporedna elementa niza $\{c_i\}$. Njuna vsota je enaka $2M-1$, kar ni deljivo s 3, prav tako pa po podobnem razmisleku kot pri $M-2$ ter $M+1$ ni deljivo s katerimkoli praštevilskim deliteljem p števila M. Sledi, da je vsota zaporednih členov zaporedja tuja N, zato N predpisane oblike ne ustreza pogojem naloge.

Primer 2.2: Če je $M \equiv -1 \pmod 3$, sta števili $M+2$ ter $M-1$ tuji N. Podoben razmislek kot v primeru 2.1 poda, da sta števili zaporedna elementa niza, ter da je njuna vsota tuja N. Tako dosežemo želeno protislovje. $\square$

2 5. naloga

Naloga 5. Naj bo $n > 1$ naravno število. Pri *konfiguraciji* plošče velikosti $n \times n$ vsako izmed n^2 polj vsebuje puščico, ki kaže gor, dol, levo ali desno. Pri dani začetni konfiguraciji polž Turbo začne v enem izmed polj in se premika iz polja v polje. Pri vsakem premiku se Turbo premakne eno dolžinsko enoto (enako dolžini stranice polja) v smeri, določeni s puščico na polju, kjer se Turbo trenutno nahaja (po možnosti se pri tem premakne izven plošče). Po vsakem premiku se puščice v vseh poljih zavrtijo za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca. Pravimo, da je polje *imenitno*, če Turbo začenši v tem polju vsako polje plošče obišče natanko enkrat in se na koncu vrne v začetno polje, ne da bi zapustil ploščo. V odvisnosti od n poišči največje možno število imenitnih polj, ki so lahko na plošči.

Rešitev. Pokazali bomo, da je največje možno število imenitnih celic čez vse konfiguracije enako:

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{4}, &\quad \text{če je } n \text{ sodo število, ter} \\ 0, &\quad \text{če je } n \text{ liho število.} \end{aligned}$$

Lihi n

Najprej pokažemo, da je število imenitnih polj enako 0, če je n liho število. Denimo, da obstaja vsaj eno imenitno polje v neki konfiguraciji. Pobarvajmo ploščo $n \times n$ kot šahovnico, tako da je imenitno polje bele barve.

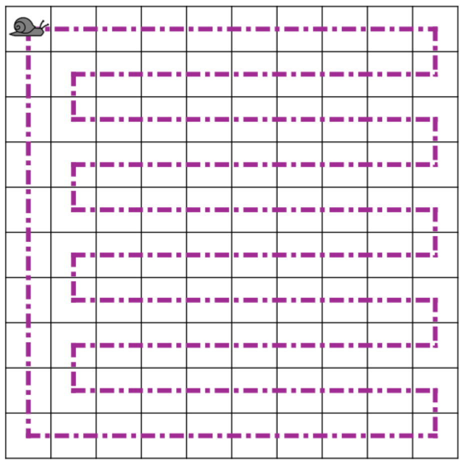
Ker Turbo obišče vsako polje natanko enkrat ter se nato vrne v začetno imenitno polje, Turbo naredi natanko n^2 premikov. Opazimo, da se po prvem premiku Turbo nahaja v črnem polju, po drugem je nazaj v nekem belem polju, ter v splošnem, da je po liho mnogo premikih Turbo v črnem polju, po sodo mnogo premikih pa v belem polju. Ker je n liho, je n^2 tudi liho, zato se mora po svojem zadnjem premiku Turbo nahajati v črnem polju. To pa ni mogoče, saj se po predpostavki Turbo vrne v svoje začetno polje, ki je bele barve.

Spodnja meja za sodi n

Konstruirali bomo začetno konfiguracijo, ki ima $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj.

Naj bo (i, j) polje v vrstici i in stolpcu j. Poglejmo si naslednji cikel:

$$\begin{aligned} (1,1) &\to (1,2) \to (1,3) \to ... \to (1,n) \\ &\to (2,n) \to (2,n-1) \to ... \to (2,2) \\ &\quad ... \\ &\to (2i-1,2) \to (2i-1,3) \to ... \to (2i-1,n) \\ &\to (2i,n) \to (2i,n-1) \to ... \to (2i,2) \\ &\quad ... \\ &\to (n,n) \to (n,n-1) \to ... \to (n,2) \\ &\to (n,1) \to (n-1,1) \to ... \to (2,1) \to (1,1) \end{aligned}$$



Opazimo, da se ta cikel vrne v začetno polje, po tem ko vsako polje obišče natanko enkrat. Da bi pokazali imenitnost polja $(1,1)$, moramo najti začetno konfiguracijo, v kateri Turbo sledi predstavljenem ciklu.

Naj bo c_i $(i-1)$-to polje na ciklu: torej $c_0 = (1,1)$, $c_1 = (1,2)$, $\ldots$, $c_{n^2-1} = (2,1)$. Za vsak i usmerimo puščico v polju c_i proti polju c_{i+1} (ali proti c_0, če je $i = n^2 - 1$), nato pa to puščico zavrtimo i-krat za $90°$ v smeri urnega kazalca. Po i premikih bo puščica v c_i zavrtena i-krat za $90°$ v nasprotni smeri urnega kazalca. Torej bo takrat, ko bo Turbo na tistem polju, puščica kazala ravno v smeri koraka, ki sledi ciklu. Turbo tako prepotuje opisan cikel, kar pomeni, da je $(1,1)$ imenitno.

Po štirih zaporednih premikih bodo vse puščice ponovno usmerjene enako, kot so bile na začetku.

Dolžina cikla n^2 deljiva s 4 (saj je kvadrat sodega števila vedno deljiv s 4), torej se plošča po celotnem ciklu povrne v začetno konfiguracijo.

To pomeni, da če Turbo začne v kateremkoli polju na tem ciklu c_i, kjer velja $4 \mid i$, ga bodo puščice vedno usmerile po isti poti kot v originalnem ciklu. Ko se vrne na prvo polje, bo pozicija puščic natanko takšna, kot na začetku originalnega cikla, zato lahko nadaljuje, dokler ne prehodi cikla dolžine n^2.

Torej so vsa polja

$$c_0, c_4, c_8, \ldots, c_{n^2-4}$$

imenitna, kar pomeni, da jih je vsaj $\frac{n^2}{4}$.

Zgornja meja za sodi n

Dokazali bomo, da za sodi n in katerokoli začetno konfiguracijo obstaja največ $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj.

Naj bo a_0 imenitno polje. Naj bo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}, a_{n^2} = a_0$ zaporedje polj, ki jih Turbo obišče, začenši v a_0. Med temi polji je zagotovo imenitno vsaj vsako četrto, torej skupaj vsaj $\frac{n^2}{4}$.

Sedaj predpostavimo, da obstaja neko imenitno polje b_0, ki ni med polji $a_0, a_4, a_8, \ldots, a_{n^2-4}$, torej imamo skupaj več kot $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj. Naj bo cikel, ki ga Turbo preleze začenši v b_0, zaporedje polj $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n^2-1}, b_{n^2} = b_0$. Imenitna polja med njimi so zagotovo vsa polja b_i z $i|4$.

Poglejmo si, ali je mogoče, da bi imeli množici polj $a_0, a_4, a_8, \ldots, a_{n^2-4}$ ter $b_0, b_4, b_8, \ldots, b_{n^2-4}$ katerikoli skupni element (recimo a_j in b_k). Potem bi to pomenilo, da se cikel $a_j, a_{j+1}, ...$ in cikel $b_k, b_{k+1}, ...$ začneta v istem polju in z isto konfiguracijo puščic. To pa pomeni, da bodo na vsakem koraku puščice pri obeh ciklih kazale v isto smer in cikla bosta identična. Potem bodo identične tudi lokacije vseh preostalih $\frac{n^2}{4} - 1$ imenitnih polje, iz tega pa sledi, da je b_0 med polji $a_0, a_4, a_8, \ldots, a_{n^2-4}$. Prišli smo do protislovja, kar pomeni, da je presek imenitnih polj iz cikla a ter imenitnih polj iz cikla b prazna množica.

Opazimo, da ker je $4 \mid n^2$, bodo puščice po n^2 korakih ponovno v začetni konfiguraciji. Če bi Turbo nadaljeval s premikanjem po vrnitvi v začetno polje, bi vedno le ponavljal isti cikel.

Poglejmo si zgornje levo polje $(1,1)$. To polje ima le dve sosednji polji, zato morata tako pot a kot pot b vključevati polja $(2,1)$ (eno dol), $(1,1)$ in $(1,2)$ (eno desno) v določenem vrstnem redu, bodisi

$$(2,1) \to (1,1) \to (1,2)$$

bodisi

$$(1,2) \to (1,1) \to (2,1).$$

Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $a_{i-1} = (2,1)$, $a_i = (1,1)$ in $a_{i+1} = (1,2)$ za nek i.

Naj bo j tak, da je $b_j = (1,1)$. Če velja $b_{j-1} = (2,1) = a_{i-1}$, potem mora biti puščica v $(2,1)$ usmerjena enako po $i-1$ in po $j-1$ korakih, torej $i \equiv j \mod 4$. Sledi, da se tudi puščice v $(1,1)$ in v naslednjih poljih ujemajo, kar pomeni, da sta poti a in b enaki (le z zamikom indeksov za večkratnik števila 4), kar pa po naši predpostavki za a in b ne velja.

Preostane nam možnost, da poti a in b kot plošče preideta v različnih smereh, torej $b_{j+1} = (2,1) = a_{i-1}$.

Da lahko kot preide pot a, morajo biti puščice v kotu po $i-1$ korakih v enem izmed naslednjih dveh položajev:

$\downarrow$	$\leftarrow$	
$\uparrow$		

ali

$\downarrow$	$\uparrow$	
$\uparrow$		

Puščica v polju $(2,1) = a_{i-1}$ mora namreč kazati navzgor. En korak kasneje mora puščica v kotu kazati desno, zato trenutno kaže navzdol. Puščica v $(1,2)$ pa mora po dveh korakih kazati dol ali desno, zato trenutno kaže gor ali levo.

Hkrati pa mora konfiguracija v kotu tudi biti takšna, da jo pot b preide v drugi smeri. Po podobnem premisleku dobimo naslednji dve možnosti za puščice v kotu po $j-1$ premikih:

$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$\uparrow$		

ali

$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$\leftarrow$		

Najti moramo torej takšno usmerjenost kotnih puščic, kjer za nek i in j obstaja rotacija, ki eno izmed zgornjih dveh možnosti zavrti v eno izmed spodnjih dveh možnosti.

To pa ni mogoče. Opazimo lahko na primer, da poti b zadoščajo le takšne konfiguracije, kjer sta zgornji dve puščici obrnjeni v isti smeri (ne glede na to, kolikokrat ju zavrtimo za $90°$, bosta še vedno enako usmerjeni). To pa ne velja za nobeno izmed možnosti za pot a. To pomeni, da ne obstaja takšna postavitev puščic v kotu, da bi jo lahko dve različni poti prešli v nasprotnih smereh.

Cikel b, ki ni enak ciklu a, torej ne more obstajati.

Iz tega sledi, da so lahko imenitna le polja oblike a_{4t} za $t = 0, 1, \ldots, \frac{n^2}{4} - 1$, kar pomeni največ $\frac{n^2}{4}$ imenitnih polj.

$\square$

Vir nalog, kjer lahko zainteresirani bralci najdejo tudi preostale naloge s tekmovanja, je povezava *https://www.egmo.org/egmos/egmo14/*. Prvo nalogo je predlagala Litva, peto pa Turčija.